

La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en Educación Primaria

Autor: López Rubio, Susana (Diplomada en Educación Primaria. Graduada en Educación Primaria Mención Lengua Extranjera, Inglés. Máster en Dirección y Gestión para la Calidad de Centros Educativos, Maestra de Educación Primaria e Inglés).

Público: Maestros de Educación Primaria. **Materia:** Matemáticas. **Idioma:** Español.

Título: La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en Educación Primaria.

Resumen

La resolución de problemas es un contenido prioritario en el área de Matemáticas porque es un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la interacción entre los distintos bloques y las demás áreas. En el presente artículo analizaremos con detenimiento los distintos tipos de problemas a los que se enfrenta un niño para resolver un problema, así como los distintos métodos para su resolución.

Palabras clave: Matemáticas, Resolución de problemas, Problemas.

Title: The teaching of the resolution of mathematical problems in Primary Education.

Abstract

The resolution of problems is an essential content in the area of Mathematics because it is a way of learning and reinforcing contents. It gives application sense to the area and allows the interaction between the different blocks and the other areas. In this article we will analyze in detail the different types of problems that a child faces in order to solve a problem, as well as the different methods for its resolution.

Keywords: Mathematics, Maths, Resolution, Problems, Solving problems.

Recibido 2018-12-17; Aceptado 2018-12-20; Publicado 2019-01-25; Código PD: 103073

PROBLEMAS DE UNA ETAPA: ADICCIÓN Y SUSTRACCIÓN.

Son los primeros que aparecen en el currículo escolar de matemáticas. Al constituir la primera actividad de resolución de problemas con la que se encuentran los niños en su vida escolar, debe ponerse toda atención y cuidado en ella. Se deben tener en cuenta la clasificación y estructura de los problemas, las dificultades que encuentran los alumnos y las estrategias que utilizan.

CLASIFICACIÓN Y ESTRUCTURA DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS ELEMENTALES VERBALES (PAEV).

Los problemas aritméticos se **clasifican** en:

-Problemas de una etapa: para alcanzar la solución sólo es necesario realizar una operación aritmética.

Juan es un niño de 15 años que colecciona cromos de fútbol. Tiene 45 cromos en un bolsillo de la chaqueta y en otro bolsillo 56 cromos ¿Cuántos cromos tiene en total entre los dos bolsillos?

Como puede observarse, en la **estructura** de un PAEV de una etapa se pueden distinguir claramente dos partes: la parte informativa y la pregunta del problema.

Por otra parte, las **cantidades** presentes en el problema son tres: dos de ellas están contenidas en la parte informativa del problema y se nos proporcionan como datos, y la otra es la incógnita del problema. Esto no quiere decir que en un problema de esta clase no pueda haber otras cantidades presentes, sino que éstas son las únicas que es imprescindible considerar para resolver el problema y cualquier otra cantidad desempeña un papel secundario.

-Problemas de más de una etapa: para alcanzar la solución se requiere el uso de una combinación de varias operaciones aritméticas o el uso de la misma operación varias veces.

En una pajarería hay 75 pájaros; durante la semana se venden un total de 28; además el vendedor deja abierta la jaula y se escapan 7 ¿Cuántos pájaros quedan finalmente?

Carlos tiene 68 euros y gasta 25 en comprar un libro. Después va a visitar a su abuela y le da 5 euros. ¿Cuánto dinero tiene ahora?

En lo referente a la **estrategia** utilizada por los resolutores para resolver este tipo de problemas, se puede hablar de estrategia aditiva o sustractiva.

ANÁLISIS DEL ENUNCIADO VERBAL DE UN PAEV

Podemos distinguir dos tipos de palabras: las que desempeñan algún papel en la elección de la operación, denominadas palabras clave (palabras propias de la terminología matemática tales como añadir, doblar dividir, etc; conectivas, verbos y palabras o grupos que expresan relaciones) y las que no desempeñan papel alguno, sino que únicamente se limitan a conectar el enunciado del problema con la realidad, o delimitar el contexto del problema y por tanto, la única dificultad que pueden causarle al resolutor, será que su significado le sea desconocido, o el contexto que delimitan le sea ajeno.

Debemos tener en cuenta que si rehúsa entrar en el problema, quizás se deba a que no encuentra familiar el contexto y es incapaz, por tanto, de dotar de sentido a la situación descrita en el enunciado.

Si pretendemos incorporar algún término poco usual para enriquecer el vocabulario de los alumnos, se debe tener el buen cuidado de definirla en la primera fase del texto del problema, que estará dedicada exclusivamente a dar información sobre su significado y no sobre el problema.

Una mandolina es un instrumento musical de cuerdas. En una tienda de música de Murcia había 125 y vendieron 45 al Ayuntamiento del pueblo que lo distribuiría entre varias orquestas. Más tarde, en dicha tienda compraron otras 60 mandolinas ¿Cuántas mandolinas hay ahora en la tienda?

ANÁLISIS GLOBAL DEL ENUNCIADO DE UN PAEV.

Nesher (1982) distingue en su modelo de análisis tres componentes:

-La componente sintáctica, que forma parte de la estructura superficial del problema.

-la estructura lógica. Un problema de una etapa bien formado, contiene tres proposiciones: dos en la parte informativa y una tercera en la pregunta del problema.

En el caso de los problemas de adicción, la estructura lógica se describe así.

Hay n x que son A

Hay m x que son B

¿Cuántos x hay que son P?

Los predicados A y B determinan clases disjuntas, es decir que semánticamente describen características diferentes y el predicado P corresponde a la unión de las clases anteriores. Han de cumplir las siguientes condiciones:

No hay x que sean a la vez A y B

Cualquier x que sea A es P

Cualquier x que sea B es P

Cualquier x que sea P es A o B

En el siguiente problema la estructura lógica está presente de forma explícita.

En casa de Paco hay 3 perros y 2 gatos ¿Cuántos animales hay?

En el siguiente problema la estructura lógica no aparece de forma explícita ya que las relaciones lógicas no se establecen entre los objetos (caramelos), sino entre las cantidades de objetos que pertenecen a Sara y Laura.

Sara tiene 17 caramelos y Laura tiene 5 caramelos más que Sara ¿Cuántos caramelos tiene Laura?

El siguiente problema, a pesar de que tiene la estructura lógica de los problemas aditivos, no cumple la condición de que A y B sean una partición de P

En un jardín hay 45 rosas y 23 amapolas, ¿Cuántos pájaros hay en el jardín?

Los problemas de sustracción tienen la misma estructura lógica que los aditivos, salvo que A y P intercambian sus papeles.

No hay x que sean a la vez B y P

Cualquier x que sea P es A

Cualquier x que sea B es A

Cualquier x que sea A es P o B

-*La componente semántica*, son los modos de codificar lingüísticamente las relaciones lógicas entre las tres proposiciones básicas del problema.

- Dependencia semántica entre los argumentos cuantificados numéricamente que aparecen en las proposiciones que subyacen al texto del problema

En un aula hay 15 alumnos y 12 alumnas, ¿ Cuántos niños hay en total?

- Dependencia semántica debida a adjetivos que califican los argumentos cuantificados

En el puerto hay 20 barcos grandes y 7 barcos pequeños ¿Cuántos barcos hay en el puerto?

- Dependencia semántica debida a los agentes a los que hace referencia el texto.

Oscar tiene 7 videojuegos y Pedro tiene 5 videojuegos ¿Cuántos videojuegos tienen entre los dos?

- Dependencia semántica debida a la relación espacial entre objetos (localización)

Felipe tiene 22 euros en la hucha y 7 en el bolsillo ¿Cuántos euros tiene en total?

- Dependencia semántica debida a la relación temporal entre los acontecimientos a los que hace referencia el texto (tiempo).

Víctor compró 3 bolígrafos ayer y 4 hoy ¿Cuántos bolígrafos tiene ahora?

- Dependencia semántica que se expresa mediante verbos que aparecen en el texto

Oscar tenía 32 cromos y le dio 5 a Roberto ¿Cuántos cromos tiene ahora?

- Dependencia semántica debida a términos relacionales que afectan a dos argumentos cuantificados dados.

Laura tiene 8 años, su hermana Alejandra tiene 3 años más que Laura ¿Cuántos años tiene Alejandra?

CATEGORÍAS SEMÁNTICAS.

El análisis global del significado del texto del problema ha demostrado ser mucho más importante que el análisis efectuado a trozos al que se acaba de hacer referencia; para ello se establecen cuatro categorías:

-*Cambio*: en estos problemas se pueden distinguir tres momentos diferentes en los que se describe cómo *una cantidad inicial es sometida a una acción, directa o sobreentendida que la modifica aumentándola o disminuyéndola*. Las tres cantidades presentes son la cantidad inicial, final -que se encuentran en la parte informativa del problema, es decir, que son datos- y de cambio o diferencia entre la inicial y final, que es la cantidad objeto de la pregunta del problema. Existen 6 cambios posibles.

| | INICIAL a | CAMBIO b | FINAL c | CRECER | DECRECER |
|-----------------|-------------|--------------|---------|--------|----------|
| CAMBIO 1 | Tengo a | Me dan b | ? a+b | * | |
| CAMBIO 2 | Tengo a | Doy b | ? a-b | | * |
| CAMBIO 3 | Tenía a | Me dan ? c-a | Tengo c | * | |
| CAMBIO 4 | Tenía a | Doy ? a-c | Tengo c | | * |
| CAMBIO 5 | Tenía ? c-b | Me dan b | Tengo c | * | |
| CAMBIO 6 | Tenía? b+c | Di b | Tengo c | | * |

-Combinar: se describe una relación entre conjuntos que responde al esquema parte - parte-todo. La pregunta del problema puede versar acerca del todo o de una de las partes, por lo que hay dos tipos posibles de problemas.

| | PARTE | PARTE | TODO |
|-------------------|-------|-------|-------|
| COMBINAR 1 | Hay a | Hay b | ? a+b |
| COMBINAR 2 | Hay a | ? c-a | Hay c |

-Comparar: los problemas que presentan una relación estática de comparación entre dos cantidades. Las cantidades presentes en el problema se denominan cantidades de referencia, cantidad comparada y diferencia. Las palabras encargadas de realizar la relación de comparación son del estilo “más que”, “menos que”.

| | REFERENCIA | COMPARADA | DIFERENCIA | MÁS | MENOS |
|-------------------|------------|-----------|-----------------------------|-----|-------|
| COMPARAR 1 | X Tiene a | Y Tiene b | ? Tiene Y más que X (b-a) | * | |
| COMPARAR 2 | X Tiene a | Y Tiene b | ? Tiene Y menos que X (a-b) | | * |
| COMPARAR 3 | X Tiene a | Y ? | Tiene c más que X (a+c) | * | |
| COMPARAR 4 | X Tiene a | Y ? | Tiene c menos que X (a-c) | | * |
| COMPARAR 5 | X ? | Y tiene b | Tiene c más que Y (b+c) | * | |
| COMPARAR 6 | X ? | Y tiene b | Tiene c menos que Y (b-c) | | * |

-Igualar: estos problemas se caracterizan porque hay entre ellos una comparación entre las cantidades que aparecen, establecida por medio del comparativo de igualdad “tantos como”. Están presentes tres tipos de cantidades, de referencia, comparada y diferencia y la incógnita puede ser cualquiera de ellas.

| | REFERENCIA | COMPARADA | DIFERENCIA | MAS | MENOS |
|------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----|-------|
| IGUALAR 1 | X Tiene a | Y Tiene b ($b > a$) | ? para igualar ($b - a$) | * | |
| IGUALAR 2 | X Tiene a | Y Tiene b ($b < a$) | ? para igualar ($a - b$) | | * |
| IGUALAR 3 | X Tiene a | Y ? ($a + c = b$) | ? para igualar si ($a + c = b$) | * | |
| IGUALAR 4 | X Tiene a | Y ? ($a - c = b$) | ? para igualar si ($a - c = b$) | | * |
| IGUALAR 5 | X ? ($b + c = a$) | Y tiene b | ? para igualar si ($b + c = a$) | * | |
| IGUALAR 6 | X ? ($b - c = a$) | Y tiene b | ? para igualar si ($b - c = a$) | | * |

-*Otros híbridos*: la clasificación de los PAEV de una etapa no permite a veces asignar un problema determinado a una de las clases, sino que hay veces que un problema tiene características propias de varias de las clases

EXTENSIÓN DE LAS CATEGORÍAS.

Cuando en el transcurso del currículo escolar se producen otros números (fracciones, decimales), aparecen de nuevo problemas de una etapa que pueden clasificarse en alguna de las categorías semánticas descritas.

Las dificultades nuevas que presentan estos problemas tienen su raíz en los aspectos conceptuales nuevos que traen consigo estos nuevos tipos de números, y no en la estructura semántica del problema; esto es, desde el punto de vista de cantidades, sin hacer referencia a qué tipo de cantidades se están manejando, la estructura de estos problemas es idéntica a la de los problemas que aparecen en los primeros niveles del currículo.

ESTUDIO DE DIFICULTADES.

Una de las variables de las que se tienen datos contrastados sobre su influencia en la dificultad que los alumnos encuentran para resolver los problemas es el tipo de proposición abierta que subyace en el enunciado del problema.

| Tipos de proposiciones abiertas | |
|---------------------------------|-------------|
| $a + b = ?$ | $? = a + b$ |
| $a + ? = c$ | $c = a + ?$ |
| $? + b = c$ | $c = ? + b$ |
| $a - b = ?$ | $? = a - b$ |
| $a - ? = c$ | $c = a - ?$ |
| $? - b = c$ | $c = ? - b$ |

- Las proposiciones canónicas de adicción y sustracción ($a + b = ?$, $a - b = ?$) son menos difíciles que las no canónicas ($a + ? = c$, $a - ? = c$).
- Las proposiciones canónicas de sustracción son generalmente más difíciles que las de adicción.
- No hay diferencias claras de dificultad entre las tres proposiciones siguientes: $a + ? = c$, $? + b = c$, $a - ? = c$
- La proposición de minuendo desconocido ($? - b = c$) es significativamente más difícil que las otras cinco proposiciones de sustracción.
- Las proposiciones con la operación en el lado derecho del signo igual (por ejemplo, $c = a + ?$) son significativamente más difíciles que las paralelas con la operación a la izquierda.

| NIVEL DE DIFICULTAD | |
|--------------------------|----------------------------|
| MAYOR | MENOR |
| $a + ? = c$ | $a + b = ?$ |
| $a - ? = c$ | $a - b = ?$ |
| sustracción | adición |
| minuendo desconocido | resto prop. sustracción |
| operación lado derecho = | operación lado izquierdo = |

El orden de dificultad en general es cambio, combinación, comparación, pero en los problemas de resta hay una ligera variación: combinar es más difícil.

Dificultades sintácticas

- El formato de presentación del problema.
- La longitud del enunciado.
- Su estructura gramatical.
- La posición de la pregunta en el enunciado.
- La presencia o no de datos en la pregunta.
- El tamaño de los números; los números grandes no pertenecen al campo de experiencia numérica de los niños y al concepto de número que tienen formado.
- La presencia de símbolos en vez de números concretos.
- El orden de presentación de los datos.

Felipe perdió 6 euros, tenía 13. ¿Cuántos euros le quedan?

La operación que hay que realizar para resolverlo es una resta, pero al estar presentados los datos en orden inverso, hay alumnos que suman para obtener la solución.

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

Fundamentalmente, los niños resuelven los problemas de tres modos diferentes:

- Mediante la elaboración de un modelo con dedos o con objetos físicos.
- Mediante el uso de secuencias de recuento.
- Recurriendo al recuerdo de hechos numéricos básicos.
- Encuentran el resultado de estos problemas recurriendo a las siguientes estrategias:
- Contar todos: consiste en contar el conjunto resultante comenzando por el uno una vez han sido representadas las cantidades mediante objetos o dedos.
- Contar hacia arriba desde el primero: comenzar el recuento comenzando por el número que aparece en primer lugar.
- Contar hacia arriba desde el mayor: comenzar el recuento comenzando por el número más grande. Es más eficiente que el anterior porque se alcanza antes el resultado, y es más sofisticado porque supone que antes de iniciar el recuento se han comparado los números para ver cuál es el mayor.
- Quitar de: se realiza con modelos físicos. Consiste en separar el todo por la parte; se separa del total la otra cantidad y se obtiene la solución por recuento de lo que queda.
- Quitar hasta: se separa del total lo que hace falta separar para que quede la otra cantidad. Al igual que en el caso anterior, también se utilizan modelos físicos.
- Contar hacia abajo desde: se realiza sin el recurso de modelo físico alguno.

- Contar hacia abajo hasta: se realiza sin el recurso de modelo físico alguno.
- Añadir hasta: es una estrategia para los problemas de substracción que, a diferencia de los anteriores, invoca acciones aditivas. Se realiza con un modelo físico y consiste en contar desde la cantidad menor a la mayor.
- Contar hacia arriba desde, es igual que la anterior pero sin la utilización de modelo físico, sino directamente sobre cantidades.
- Emparejar: consiste en el apareamiento sobre un modelo físico de las cantidades, y el recuento posterior de la parte que queda sin pareja.

Las estrategias que se utilizan en primer lugar por los niños son aquellas que se realizan con modelos físicos y los procedimientos de recuento que comienzan por el uno; esto es, contar todos, quitar de y quitar hasta, añadir hasta y emparejar.

El uso de estrategias de recuento es posterior dado que requiere un conocimiento más profundo de los números y las propiedades aritméticas, y, además, la posesión de habilidades para contar de diversos modos: a partir de un número, hacia arriba, hacia abajo. En general contar hacia arriba precede a contar hacia abajo.

EL PROCESO DE TRADUCCIÓN

Al describir el proceso de resolución de un problema aritmético elemental, tras las fases de lectura y comprensión del enunciado, se entra en la fase crucial del proceso: la traducción, esto es, el punto del proceso en el que se decide cuál es la operación aritmética que hay que realizar.

Independientemente de la riqueza lingüística que el sentido común indica que hay que tener, para realizar la traducción algunos investigadores parecen pensar que las correspondencias entre ambos lenguajes se establecen fundamentalmente a través de las palabras clave. El niño decide la operación que tiene que realizar en función del significado que atribuye a la palabra clave.

Hay palabras clave que pueden indicar distintas operaciones. Por otro lado, los grupos de palabras que expresan relaciones sólo determinan unívocamente la operación en el contexto global del problema y no consideradas aisladamente.

Las estrategias de instrucción basadas en la determinación de las palabras clave, son las siguientes:

- Lectura del enunciado obligando a una entonación especial de las palabras clave.
- Subrayado de palabras como tarea previa a la escritura de la expresión aritmética.
- El uso de la pregunta ¿Dónde dice que hay que sumar? con posterioridad a que el niño haya tomado la decisión de sumar.

ACTIVIDAD PARA ANALIZAR Y EVALUAR EL RESULTADO Y EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

-ENTENDER EL PROBLEMA

Lee el enunciado del problema. Subraya los datos más relevantes:

- ¿Qué te pide el problema?
- ¿Qué datos del enunciado son los más importantes?
- ¿Qué tienes que encontrar? ¿Dónde tienes que llegar?
- ¿Qué datos conoces? Anótalos brevemente.
- Anota los datos que tienes que encontrar para solucionar el problema.

-EVALUACIÓN DEL RESULTADO DEL PROBLEMA

Pautas para analizar y para evaluar el resultado y el proceso de resolución del problema.

¿Has conseguido encontrar la solución del problema?

Por qué? Justifica tu respuesta

¿Alguna de las partes del problema se podría calcular de alguna otra manera?

¿Cómo

Revisa los cálculos que has realizado. ¿Has encontrado algún error?

¿De qué tipo de error se trata?

¿Cómo puedes evitar en el futuro cometer este tipo de error?

Bibliografía

- FLAVELL, J. (1976): "Metacognitive Aspects of Problem Solving", en L.B. Resnick (ed.) (1976): "The Nature of Intelligence". N.J. Erlbaum Hillsdale.
- FLORES MARTÍNEZ, P y RICO ROMERO, L (2015): "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria". Madrid: Pirámide.
- Godino, j.d. coord. (2004): Didáctica de las Matemáticas para Maestros. Granada: Proyecto Edumat-Maestros.
- Godino, j.d. coord. (2004): Matemáticas para Maestros. Granada: Proyecto Edumat-Maestros.
- MARTÍNEZ MONTERO, J y SÁNCHEZ, C (2013): "Resolución de Problemas y método ABN". Madrid: Wolters Kluwer Educacion.
- MAYER, R.E. (1983): "Thinking, Problem Solving and Cognition". Nueva York:Ed. Freeman
- POLYA, G. (1983): "Mathematical Discovery: On Understanding. Learning and Teaching Problem Solving". Vol. 2. Nueva York : Ed. Wiley.
- PUIG, L. y Cerdón, F. (1988): "Problemas aritméticos escolares". Madrid: Ed. Síntesis.
- SCHOENFELD, A. (1985): "Mathematical Problem Solving". Orlando: Ed. Academic Press.