

La influencia de las matemáticas sobre las afinaciones y los temperamentos en la antigüedad

Autor: Vert Alcover, Carles (Doctor en Educación Musical, Jefe de Estudios y Profesor de Música en Secundaria y Bachillerato).

Público: Profesores de Música y de Matemáticas. **Materia:** Música y Matemáticas. **Idioma:** Español.

Título: La influencia de las matemáticas sobre las afinaciones y los temperamentos en la antigüedad.

Resumen

En el siguiente artículo realizamos una revisión sobre la relación de las matemáticas, aplicadas a las afinaciones y temperamentos utilizados en la antigüedad, y su evolución; comentamos las características más importantes de la afinación pitagórica, y del círculo de quintas -sistema usado hasta mediados del siglo XV-, así mismo se explican las características del sistema de Aristógenes, antagónico al de Pitágoras, para terminar con Ptolomeo que retomó el sistema pitagórico.

Palabras clave: afinación, temperamentos musicales, afinación pitagórica, monocordio-diapason, círculo de quintas, escala pitagórica, Aristógenes, Ptolomeo, Pitágoras.

Title: The influence of mathematics on tunings and temperaments in antiquity.

Abstract

In the following article we carry out a revision on the relationship of mathematics, applied to the tunings and temperaments used in antiquity, and their evolution; we will discuss the most important characteristics of the Pythagorean tuning, and of the circle of fifths -system used until the middle of the XV century-, likewise the characteristics of the system of Aristógenes, antagonistic to that of Pythagoras, are explained, to end with Ptolemy who retook the Pythagorean system.

Keywords: tuning, musical temperaments, Pythagorean tuning, monochord-diapason, circle of fifths, Pythagorean scale, Aristógenes, Ptolemy, Pythagoras.

Recibido 2018-01-18; Aceptado 2018-01-24; Publicado 2018-02-25; Código PD: 092054

En algunas ocasiones solemos confundir la afinación con el temperamento, por este motivo vemos la necesidad de definir los términos; Goldáraz (1992) en su libro *Afinación y temperamento en la música occidental*, (que citaremos varias veces en este artículo), los define de la siguiente manera:

<Hablamos de **afinación** cuando el objetivo del sistema es conseguir consonancias justas. En este sentido van la afinación pitagórica, con sus quintas justas, y la afinación justa, un intento de combinar quintas y terceras justas. El **temperamento** consiste más bien en un compromiso entre consonancias justas incomparables, en un ajuste entre consonancias con el que, a costa de desafinar ciertos intervalos, el sistema adquiera determinadas ventajas>. (p. 13)

Prosigue comentando las diversas divisiones de la octava que se realizaron en la antigüedad, y resaltando las tres que tuvieron más importancia y notabilidad en la época, que fueron:

1. La afinación pitagórica
2. El sistema de Aristógenes
3. La división diatono-sintónica de Ptolomeo

Siendo únicamente la pitagórica la que se dilató en el tiempo debido a la monodía utilizada en el Canto Gregoriano y a los escritos de Boecio; el cual la explicaba con todo lujo de detalles.

1. LA AFINACIÓN PITAGÓRICA

En la antigua Grecia, Pitágoras de Samos, en griego antiguo, Πυθαγόρας (572-497 a.C.), aunque no existe unanimidad entre la fecha exacta de su nacimiento y su muerte, lo que sí sabemos es que fue considerado como el primer matemático puro, en ocasiones no disponemos de fuentes fidedignas para afirmar ciertos conocimientos, puesto que no se ha

conservado ningún escrito oficial de Pitágoras, y en muchas ocasiones, sus discípulos justificaban sus doctrinas citando a su maestro constantemente, de ahí la dificultad en ocasiones de delimitar la mano de Pitágoras o de los pitagóricos.

Podemos distinguir tres etapas en la vida de Pitágoras, según Flores (2008); una primera etapa la situamos en el mundo griego, en la que conoció a un anciano ya, Thales de Mileto, el cual, entre otras cosas, le aconsejó viajar a Egipto para profundizar sus conocimientos, de hecho sus viajes a Babilonia y a Egipto forman su segunda etapa, en la que asimiló tanto conocimientos matemáticos, como astronómicos, y las costumbres de los sacerdotes de los Templos egipcios, las cuales utilizó posteriormente en su Hermandad.

Después de una breve estancia en la isla de Samos (entre la segunda y la tercera etapa), en lo que más tarde se llamó la Magna Grecia, aprendió conocimientos aritméticos y musicales, para después volver a Crotona, donde fundó su escuela y gozó de gran prestigio y poder.

1.1 El Monocordio-diapason

Diógenes Laercio (215-250 d. C.), también le atribuye la invención del monocordio-diapasón, de múltiples cuerdas, el cual utilizó para verificar la relación entre números, pesos y sonidos.



Imagen 1⁹⁰. Jubal y Pitágoras descubriendo las razones de la consonancia.
Recuadro inferior izquierdo, Pitágoras con su Monocordio-diapason

También descubrió las relaciones aritméticas de la escala musical, es decir, los intervalos musicales regulares (la consonancia); basándose entre otras cosas, en que la frecuencia del sonido es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda.

⁹⁰ Gaffurio (1492) *Theorica musicæ*

1.2 La escala pitagórica

Una anécdota que conocemos mediante los escritos de Boecio (480-524 d. C.), y que rescatamos gracias a Britos (2015), nos hace admirar la persistencia y la capacidad de observación de este genio:

<Pitágoras obsesionado por explicar matemáticamente los intervalos, al pasar por una herrería quedó sorprendido por el sonido rítmico del golpe de los martillos en el yunque. Entró, observó y experimentó utilizando cinco martillos. Comprobó que uno, que rompía la escala perfecta de sonidos, tenía un peso sin relación numérica con el resto, por lo que lo eliminó. Con los restantes, obtuvo las siguientes conclusiones: sus pesos estaban en la proporción 12, 9, 8 y 6; el mayor (12), de peso doble del más pequeño (6), producía un sonido (una octava) más bajo que el menor. El peso de los otros dos martillos (9 y 8) correspondía a la media aritmética y armónica respectivamente de los de peso 12 y 6, por lo que dedujo que darían las otras notas fijas de la escala>. (p. 90 y ss)



Imagen 2⁹¹. *Jubal cincelando notas en dos columnas, dos hombres en una herrería y Pitágoras detrás de ellos con dos pesos*

Así se dio cuenta de que, si cogía dos cuerdas distintas en longitud, algunas veces sonaban bien, y si variaba la longitud de alguna de ellas sonaban mal, de esta forma descubrió las consonancias y las disonancias, y averiguó que las mejores consonancias se daban cuando una cuerda tenía el doble de longitud que la otra (relación 2/1), y cuando las relaciones de longitudes eran 3/2 y 4/3, es decir, utilizando siempre números naturales.

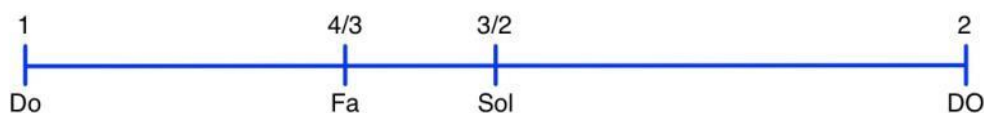


Imagen 3⁹². *Escala pitagórica*

⁹¹ Grabado en madera de *Flores musicae omnis cantus Gregoriani of Hugo Spechtshart of Reutlingen (c.1285-c.1360)*

⁹² Extraído el 3 de abril de 2015 de:

Llamando octava o *diapason* a la relación 2/1, quinta o *diapente* a la 3/2 y cuarta o *diatessaron* a la relación 4/3, nomenclaturas que seguimos utilizando en la actualidad en la música tonal occidental.

1.3 El círculo de quintas

Es la relación que existe entre los doce sonidos de la escala cromática, con sus relativas tonalidades mayores o menores y armaduras.

Para Lhemans (2014), el círculo de quintas sirve para facilitar la memorización de las escalas, y relaciona lo que anteriormente Pitágoras descubrió con su Monocordio-diapason; si nos fijamos, el Do está al lado de los grados más importantes y consonantes de la armonía, a la derecha el Sol (V) y a la izquierda el Fa (IV). Esto sucederá en todos los grados correspondientes, en todos los casos a la derecha del tono se hallará la Dominante (V) y a su izquierda la Subdominante (IV).

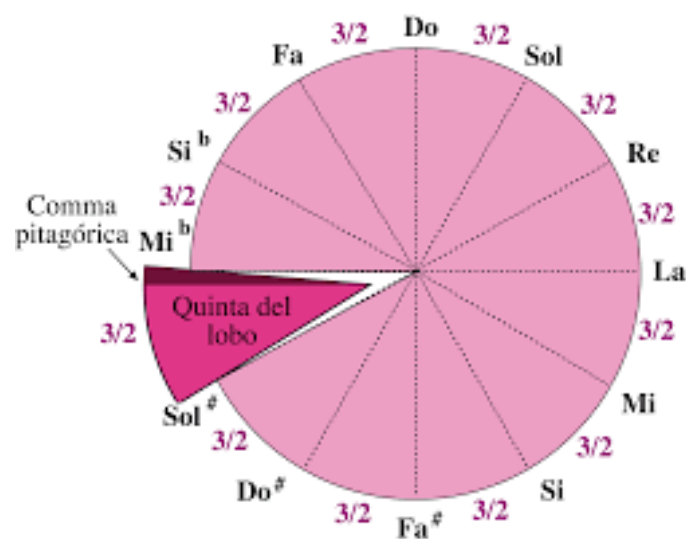


Imagen 3⁹³. Círculo de quintas pitagórico (Quinta del lobo y Comma pitagórica)

Pero el círculo de quintas pitagórico no era perfecto, porque estaba formado por doce quintas, once de las cuales eran puras 3/2 según el sistema pitagórico, y una doceava que no lo era, fue la denominada quinta del lobo.

La diferencia entre la quinta del lobo pitagórica y las quintas puras pitagóricas, es la misma que existe entre doce quintas puras y siete octavas; a esta diferencia se le llama *comma pitagórica*, que Liern (2009) lo ejemplifica de forma matemática de la siguiente manera:

$$12 \text{ quintas pitagóricas es igual a } \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129,7463$$

$$7 \text{ octavas pitagóricas es igual a } 2^7 = 128$$

http://enriquealexandre.es/wpcontent/uploads/2013/02/EscalaPitagorica_1.jpg?8cd549

⁹³ Extraído el 7 de agosto de 2015 de:

https://www.google.es/search?q=quinta+del+lobo+comma+pitagorica&biw=1242&bih=612&source=lnms&tbn=isch&a=X&ved=0CAYQ_AUoAWoVChMI37GeoJ-VxwIVzFgUCh2VoQuB#imgsrc=1aVnayTpyx9cOM%3A

Utilizando la regla para restar intervalos⁹⁴, la diferencia entre estos dos valores, **1,0136** es la llamada *comma pitagórica*, y por minúsculo que parezca este desajuste, ha sido uno de los grandes temas a investigar por los musicólogos a lo largo de más de veinte siglos (Bach resuelve parcialmente este dilema con el clave bien temperado), debido a que este desajuste se produce en una nota u otra, dependiendo de la nota por la que se empieza, concluye Liern (2009).

2. EL SISTEMA DE ARISTÓGENES

Ἀριστοῦ γενος (354-300 a.C.), conocido en castellano como Aristógenes, filósofo, músico y teórico de la música griego, nació en el sur de Italia, la actual Tarento, educado por Spintaro, su padre, que a su vez fue discípulo de Sócrates, escribió 453 escritos siguiendo el estilo de Aristóteles y la escuela peripatética, solo han llegado hasta nuestros días algunos fragmentos de los *Elementos de rítmica* y los dos libros de los *Elementos de armonía*.



Imagen 4. Fragmento del tratado de Aristógenes, *Rythmica Stoicheia*

El sistema de Aristógenes es importante porque se aleja del encadenamiento del círculo de quintas de Pitágoras, y se basa única y exclusivamente en la serie armónica y en la concepción del espacio de alturas.

Para Fubini (1988), Aristógenes fue capaz de desviar el centro de interés de los aspectos intelectuales de la música, hasta los aspectos más sensibles (recordemos la división del currículo), es decir, el estudio de la música no solo tiene un carácter teórico (Pitágoras), sino también práctico.

Aunque la novedad más sensible que aporta al sistema de afinación constituye en dividir los intervalos (tetracordo) en partes iguales (30), a diferencia de lo que realizaban los pitagóricos con su método; para ello calcula dicha división con número enteros (anticipándose al temperamento igual que posteriormente estudiaremos); esta forma de proceder fue olvidada en Europa después de las invasiones germánicas, y ya en el Renacimiento, Zarlino la retoma y la expone de forma magistral en su tratado de 1558 *Instituciones Armónicas*, por este motivo el sistema posteriori, toma el nombre de Aristógenes-Zarlino.

⁹⁴ Consultar la aritmética de los intervalos en Liern Carrión, V. & Queralt Llopis, T. (2008). *Música y matemáticas: La armonía de los números. Día escolar de las matemáticas. Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.*

3. LA DIVISIÓN DE PTOLOMEO

Claudius Ptolomeus, Claudio Ptolomeo en castellano (Ptolemaida, Tebaida, 100-170 d.C. Cánope), vivió y trabajó en Egipto (cuando era una provincia del Imperio Romano), se cree que en la famosa Biblioteca de Alejandría, escribió sobre astronomía, óptica, geografía y música.

Ptolomeo estaba en desacuerdo con la división de Aristógenes y retomó la afinación pitagórica. Cuando escribe su *Harmónica*, conocía toda la historia y los tratados anteriores a él; también tenía a su favor que la teoría de la música helena ya llevaba un desarrollo previo de cerca de seis siglos. Claudio la retoma y es favorable a la *armonía de las esferas*, porque para él, el orden subyacente a los intervalos es el mismo que subyace en los cielos; teoría compartida por los Pitagóricos, Platón, Plinio o Boecio y criticada por Aristóteles.

Según Redondo (2002), la doctrina musical de Ptolomeo tiene que ser considerada de interés científico, al ser su tratado una nueva perspectiva a problemas antiguos, y destaca dos rasgos a destacar de su teoría; en primer lugar, el uso ecléctico de las fuentes, valiéndose de muchos autores conocidos en la tratadística (Platón, Aristóteles, Dídimos, Aristógenes, etc.), y en segundo lugar la posición ecléctica referente al planteamiento epistemológico: La percepción y la razón:

<Mediante la percepción, el estudioso de la música puede aprehender los intervalos y las relaciones sonoras fundamentales; mediante la razón, obtendrá resultados exactos en la medición de intervalos para los que, debido a su tamaño mínimo, la percepción no basta. (...) desde mucho antes de la época de nuestro autor la teoría musical estaba dividida en dos facciones: pitagóricos y aristoxénicos. Ptolomeo acepta la confianza de éstos en la capacidad de la percepción, pero su carácter matemático le lleva a aceptar las líneas fundamentales de los pitagóricos: un trasfondo numérico para toda la realidad, incluidos los intervalos musicales –expresados entonces en armónicos– y las estructuras más complejas. Con ello se pretende alcanzar un objetivo propio de más largo alcance que lo habitual en la tratadística musical: demostrar la coherencia y analogía entre el modelo matemático –las hipótesis– y los fenómenos naturales (entre ellos los musicales, pero también los celestes)>. (p. 75 y 76)

Las divisiones tretacordiales en dos tonos de tamaño diferente (mayor, 9/8 y menor 10/9) de Ptolomeo se asemejan mucho a la justa entonación de intervalos puros.

Bibliografía

- Britos, G. (2015). *Música y ciencia*. Editada por el autor y publicada bajo licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0.
- Flores, F. L. (2008). *Matemáticas en la antigüedad*. Jaén: Íttakus.
- Fubini, E. (1988). *La estética musical desde la Antigüedad hasta el siglo XX*. Madrid: Alianza editorial.
- Goldáraz, J. J. (1992). *Afinación y temperamento en la música occidental*. Madrid: Alianza Editorial.
- Lhemans y Lezama, R. M. P. (2014). *Música fácil: Teoría de la Música*. Bloomington: Palibrio LLC.
- Liern, V. y Queralt, T. (2008). "Música y matemáticas: La armonía de los números. Día escolar de las matemáticas." *Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas*.
- Liern, V. (2009). "Las matemáticas de Johann Sebastian Bach." *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 61, 113-118.
- Redondo, P. (2002). *La Harmónica de Claudio Ptolomeo: edición crítica con introducción, traducción y comentario*. (Tesis Doctoral no publicada), Universidad de Murcia.