Breve introducción a los Números Hiperreales y al Análisis no Estándar junto con su contribución a la didáctica de las matemáticas

Autor: Matos Campos, Carlos (Graduado Universitario en Matemáticas por la UNED (Universidad Nacional de Educación a Distancia)).
Público: Profesores de Matemáticas, Estudiantes Universitarios,Estudiantes de Bachillerato. **Materia:** Matemáticas. **Idioma:** Español.

Título: Breve introducción a los Números Hiperreales y al Análisis no Estándar junto con su contribución a la didáctica de las matemáticas.

Resumen
El presente artículo trata de exponer de una manera sencilla y muy breve una aproximación al Análisis no Estándar y a los Números Hiperreales, así como sus posibles aplicaciones en el aprendizaje del análisis matemático en un curso oficial de Bachillerato de ciencias. Los conceptos de infinitesimal e infinito pueden ser una poderosa herramienta que ayude al alumno de 2º de Bachillerato a calcular límites, derivadas de forma simple.
Palabras clave: Límite, infinitesimal, infinito, Análisis no Estándar, Números Hiperreales.

Title: Brief introduction to Hyper-Numbers and Non-Standard Analysis together with their contribution to the teaching of mathematics.

Abstract
The aims of this article are to expose a simple and brief approximation to the theoretical basis of non-standard analysis and hyperreal numbers, as well as its possible applications in the learning of mathematical analysis in an official Bachelor of Science course. The concepts of infinitesimal and infinite can be a great tool that helps the student of 2nd of Bachelor of Science course to calculate limits of simple form.
Keywords: Limit, infinitesimal, infinite, non-standard analysis hyperreal numbers.

Recibido 2017-08-28; Aceptado 2017-09-01; Publicado 2017-09-25; Código PD: 087106

INTRODUCCIÓN

A la hora de aprehender unos conocimientos educativos, en particular, una teoría matemática se debería buscar en el alumno una actitud adecuada para enfocar el estudio y aprendizaje de dicha teoría; es decir, en mi opinión debemos tener antes de nada alumnos motivados y atentos a lo que vamos a enseñarles y mostrarles. Sin esta primera premisa los alumnos no pueden utilizar de una manera óptima las herramientas que vamos a enseñarles para poder profundizar en el conocimiento intelectual y personal de ellos mismos.

Nosotros le damos las “herramientas matemáticas”, es decir, les podemos dar los conceptos de límite de una sucesión y de una función , pero si los alumnos no tienen una actitud adecuada no podrán utilizar estas “herramientas” en el conocimiento intelectual de la teoría del Análisis Matemático y mucho menos profundizar con éxito en su autoconocimiento personal, por ejemplo: un alumno que no sepa resolver el $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$ bien porque no le dejan derivar las dos funciones $f(x) = senx$ y $g(x) = x$ y utilizar el Teorema de L’Hôpital, o bien porque no conozca dicho teorema y el anterior límite no le parezca tan evidente como otros que ha realizado. ¿Cómo el alumno maneja su frustración?, ¿abandona el intento de resolución a los pocos minutos o por el contrario es proactivo y lo intenta varias horas? Pero, ¿Cómo aprendemos a jugar mejor al tenis, a jugar mejor al futbol, a nadar mejor…? Un preparador de natación nos da “orientaciones” de como nadar y por otro lado observa nuestros progresos y movimientos en la piscina para corregirnos y motivarnos en el aprendizaje de los diferentes movimientos y técnicas de la natación. En Secundaria y Bachillerato el rol del preparador de natación lo realiza el docente que debe guiar a sus diferentes alumnos con sus diferentes contextos sociales, culturales y económicos hacia el éxito del aprendizaje de la teoría matemática. En mi opinión, en el curso de aprendizaje de una teoría matemática por parte de un alumno se dan muchas variables que pueden e influyen en dicho proceso intelectual y personal, pero hay dos variables que destacaría sobre las demás: una actitud motivada del alumno en dicho aprendizaje y la "manera" en que se imparte dicha teoría matemática. Por ejemplo: ¿sí existieran otras alternativas al aprendizaje del alumno del concepto de continuidad? Una función real f(x) de variable real es continua en un punto $c \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ si $|x - c| < \delta$. Esta es la manera en que un docente enseña hoy en día ,en Bachillerato, el concepto de continuidad de una función real de variable real pero quizás este concepto, así desarrollado puede "alejar" al alumno de la idea intuitiva de continuidad: algo que se produce sin interrupciones, sin saltos.

El objetivo principal de este artículo es introducir una teoría matemática alternativa a la oficial: **Los Números Hiperreales y el Análisis no Estándar**, de tal forma que sean una herramienta motivadora para el alumno en su proceso de aprendizaje del análisis matemático. Una función real f(x) de variable real es continua en un punto $c \Leftrightarrow \ \forall x\ (x \approx c \Rightarrow f(x) \approx f(c))$. Esta es la manera en que el análisis no estándar y los números hiperreales definen el concepto de continuidad, ¿no es más intuitivo y motivador para un alumno en su proceso de compresión del concepto de continuidad?

NOCIÓN DE INFINITESIMAL O INFINITÉSIMO E INFINITO EN LA MATEMÁTICA NO CLÁSICA O ESTÁNDAR

Aquello que mejor nos define a primera vista es lo que más cambia, lo que más se mueve.
Las definiciones son un pacto con la realidad, una manera de esconder los intereses transitorios.
Luis García Montero. "Una forma de resistencia"

El cálculo con elementos infinitamente pequeños (infinitesimales o infinitésimos) e infinitamente grandes (infinitos) fue planteado y desarrollado incipientemente por Arquímedes de Siracusa (287- 212 a.c) en la Antigua Grecia. Arquímedes resolvió utilizando el concepto de infinitesimal como una cantidad infinitamente pequeña y su método exhaustivo los primeros problemas del hoy llamado cálculo Integral. Posteriormente fueron Isaac Newton (1643- 1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) los que desarrollaron y ampliaron en mayor profundidad las ideas de Arquímedes dando lugar al cálculo diferencial moderno. Ambos utilizaron la "existencia" de números ilimitadamente grandes e ilimitadamente pequeños en sus diversas teorías y formulaciones. Leibniz además de matemático entre otras vocaciones fue filósofo y lógico y esto le permitió tener una visión más global sobre la fundamentación y desarrollo de una teoría matemática. Una buena notación ayuda en los procesos de pensamiento y la que Leibniz utilizo fue especialmente dichosa: dx y dy para representar las diferencias más pequeñas posibles de la variable x y de la variable y. Newton utilizó otra notación menos afortunada para representar a los infinitesimales que Leibniz: $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Desafortunadamente los infinitesimales de Newton y Leibniz no tenían una fundamentación lógica robusta y cohesionada. El uso de los mismos sin ese rigor podía llevar a contradicciones. Ejemplo: si calculamos la derivada $\frac{dy}{dx}$ según Leibniz de la función $y(x) = \ x^3$ razonaremos de la siguiente manera, tomaremos un infinitésimo dx y calculamos el incremento de la función $y(x)$, $dy = y(x + dx) - y(x)$ y lo dividimos entre dx que es una *"cantidad infinitesimal, nula"*

$$dy = (x + dx)^3 - x^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} x^k (dx)^{n-k} \ - \ x^3 \ = \ x^3 + 3x^2\,dx \ + \ 3x\,(dx)^2 \ + \ (dx)^3 - x^3 \ = \ 3x^2\,dx \ + \ 3x\,(dx)^2 \ + \ (dx)^3 \Rightarrow$$

Tenemos que $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \ + \ 3x\,dx \ + \ (dx)^2$. Por último Leibniz parte de que dx es una cantidad infinitamente pequeña, no nula, y al calcular la derivada considera despreciables los dos últimos términos, al estar multiplicados por dx y $(dx)^2$ respectivamente, es decir "toma $dx = 0$". La contradicción surge desde un punto de vista lógico al utilizar $dx = 0$ y $dx \neq 0$ en el mismo razonamiento.

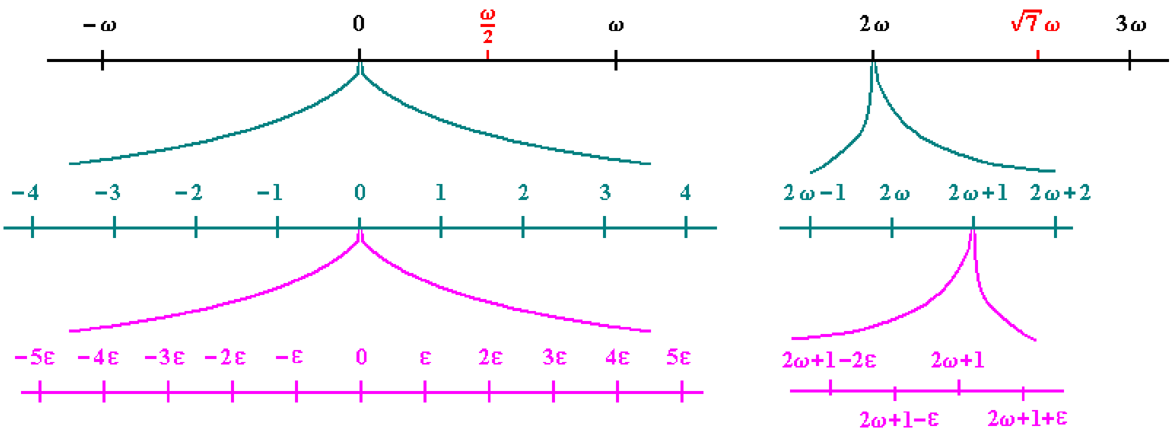
Diferentes matemáticos en diferentes épocas siguieron tratando de encontrar el rigor matemático necesario para poder conformar los números infinitesimales e infinitos como una ampliación de los números reales $\mathbb{R}$ pero no fueron capaces de hallar dicho rigor. Tampoco ayudo para nada el concepto de *límite* creado por Weirstrass (1815-1897) a través del cual podemos *desarrollar* el concepto de infinitesimal e infinito. Al contrario del concepto de número infinitesimal el concepto de límite tenía rigor matemático, logrando un cálculo infinitesimal en el que tales números infinitesimales ni se aludían. En este orden de cosas los números infinitesimales e infinitos tuvieron que esperar al periodo de 1960-1970 para ser introducidos con absoluto rigor en el Cálculo Infinitesimal por Abraham Robinson (1918-1974) con fundamentos lógicos sólidos.

BREVE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA MATEMÁTICA DE ABRAHAM ROBINSON

En 1966, Robinson publica su libro Non-Standar Analysis en el que plasma todas sus ideas y desarrolla la teoría necesaria para dar rigor a los números infinitesimales e infinitos dentro del Cálculo Infinitesimal. Robinson mediante el uso de la lógica matemática de primer orden y la Teoría de modelos desarrolló una extensión del cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ al cuerpo de los números hiperreales $*_{\mathbb{R}}$ en el que construía tres nuevos tipos de números: **los números infinitesimales**, **los números infinitos** y **los números apreciables**. Establece los siguientes tipos de números:

1. Un número $x \in *_{\mathbb{R}}$ es infinitesimal positivo o negativo si $\forall n \in \mathbb{N}, n >= 1 \; |x| < \frac{1}{n}$, es decir, x es un número más pequeño que cualquier número real positivo, exceptuando el número cero que lo podemos considerar como infinitesimal. También se puede decir que x es un número infinitesimal si su inverso: $\frac{1}{x}$ es un infinito.
2. Un número $x \in *_{\mathbb{R}}$ es infinito positivo o negativo si $\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que $|x| > n$, es decir, x es mayor que cualquier número real positivo.
3. Un número $x \in *_{\mathbb{R}}$ es un número real ordinario o estándar si $x \in \mathbb{R}$ (números reales), se le llama estándar pues pertenece a lo clásico, a los números reales.
4. Un número $x \in *_{\mathbb{R}}$ es apreciable si está formado por la suma de un número real ordinario denominado parte estándar de x con un infinitesimal positivo o negativo, es decir $x = r + \lambda$, siendo $r \in R$ y $\lambda \approx 0$ (un infinitésimo positivo o negativo).

Las tres primeras definiciones nos son conocidas pero la cuarta definición permite visualizar en la recta geométrica a todo real ordinario r, rodeado de todos los números hiperreales que están próximos a él. De una manera intuitiva podemos considerar a x, siendo $x = r + \lambda$, como un "átomo", en el que tenemos r como el núcleo y al variar λ con diferentes infinitesimales, obtenemos los diferentes electrones del átomo. Dicho esto, considerando a ε un infinitesimal cualquiera y a ω un infinito cualquiera, gráficamente podemos visualizar a los números hiperreales de la siguiente manera[145]:



En la última fila de color rosa se pueden ver los infinitesimales ($-\varepsilon, -2\varepsilon, \varepsilon, 3\varepsilon \ldots$) que gravitan como los electrones entorno al núcleo r=0 ; un "razonamiento similar" se le puede aplicar, por ejemplo, al infinito $2\omega + 1$ de tal forma que los números hiperreales como $2\omega + 1 - 2\varepsilon$, $2\omega + 1 + \frac{\varepsilon}{4}$, $2\omega + 1 - 2\varepsilon$, ... son muy próximos a él y gravitan entorno a él como los electrones respecto al núcleo de un átomo.

En el caso de cualquier número apreciable $x = r + \lambda$, basta cambiar el número real ordinario $r = 0$ en la fila rosa por cualquier número real $r \neq 0$, por ejemplo: $r = 1, r = 1{,}23456, r = 50{,}89, r = \sqrt{67}$ para obtener los diferentes números apreciables $r, r \pm \frac{\varepsilon}{4}, r \pm \varepsilon, r \pm 2\varepsilon, r \pm \sqrt{\varepsilon}$ ...que gravitan entorno al número r (núcleo). Esto lo hemos conseguido considerando un infinitesimal concreto como "ε" y sus diferentes variaciones: $\pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon, r \pm \frac{\varepsilon}{8}, r \pm \sqrt{\varepsilon}$ ...y si tomásemos otro infinitesimal

[145] Wikipedia

"ε^*" conseguiríamos otros números apreciables diferentes, pues de la definición de número apreciable $x = r + \lambda$, dado un r (número real ordinario) concreto, lo que hacemos es variar λ con diferentes infinitesimales, la definición de número apreciable nos permite modificar, la manera en cómo vamos a calcular los límites: Como hemos visto anteriormente, al calcular un límite siguiendo el método de Leibniz, caíamos en la contradicción de dar a dx el valor cero, cuando se parte de la hipótesis de que $dx \neq 0$. Si calculamos la derivada $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ según Robinson de la función $\mathrm{y(x)} = \mathrm{x}^3$ razonaremos de la misma manera que Leibniz hasta llegar al número apreciable : $3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x}\,\mathrm{dx} + (\mathrm{dx})^2$. Pero para Robinson la derivada $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ no es igual a $3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x}\,\mathrm{dx} + (\mathrm{dx})^2$. Robinson en su lógica matemática con la que realiza una extensión del cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ al cuerpo de los números hiperreales $*_{\mathbb{R}}$, incluyó un nuevo predicado " $\mathrm{St}(\,.\,)$" o "estándar" por lo que del número apreciable: $3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x}\,\mathrm{dx} + (\mathrm{dx})^2$, Robinson, se queda con su parte estándar que es $3\mathrm{x}^2$, de esta manera elegante, evita el que se produzcan contradicciones de considerar al infinitesimal $\mathrm{dx} = 0$ y $\mathrm{dx}\neq 0$, según que cálculos realicemos. La derivada $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ según Robinson de la función $\mathrm{y(x)} = \mathrm{x}^3$ es $3\mathrm{x}^2$, al igual que Leibniz, pero considera la parte estándar del número apreciable. $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{St}(3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x}\,\mathrm{dx} + (\mathrm{dx})^2) = 3\mathrm{x}^2$, ya que $3\mathrm{x}\,\mathrm{dx}$ y $(\mathrm{dx})^2$ son dos infinitésimos. Como conclusión podemos decir que a la hora de calcular "límites" para el análisis no estándar, del número que obtengamos por manipulación algebraica nos quedaremos con su parte estándar si es un número apreciable, si el número resultante es un infinitesimal ε la solución será: 0, ya que podemos considerar ε como un número apreciable $0+\varepsilon$, cuya parte estándar es cero. Si el número resultante es infinito entonces infinito positivo o negativo serán la solución.

También debemos diferenciar los infinitos hiperreales ω de Abraham Robinson de la teoría de los números transfinitos de Georg Cantor (1845-1918). Mientras que el Ánalisis Estándar trabaja con reales, Cantor desarrollo su teoría desde los números naturales. Aleph-cero, N_0 es el cardinal ("el tamaño") del conjunto de los números naturales y es un cardinal transfinito, mayor que cualquier número natural pero siendo el número transfinito más pequeño de la teoría desarrollada por Cantor. Cantor sólo se interesó en los números naturales y fue construyendo sus sucesivos Alephs: $N_0 < N_1 < N_2$ … considerando además la hipótesis del continuo que Card (P(ℕ)) [146]= Card(ℝ)= $2^{N_0} = N_1$ pero considerar $\frac{N_0}{8}$ o πN_0 no tiene sentido en la teoría que él desarrolló, pues implica la multiplicación por números reales distintos de los naturales. Sí que tiene sentido $2N_0 = N_0 + N_0$, $8N_0$, $N_0 + N_0 + \overset{n}{\rightarrow} + N_0 = \mathrm{n}.N_0$, $N_0 + N_0 + \overset{N_0}{\rightarrow} + N_0 = N_0.N_0 = {N_0}^2$, etc. Pues nos remitimos siempre a los números naturales.

También podemos clasificar los números hiperreales $*_R$ en finitos e infinitos.

Números finitos: Los números reales ordinarios, los números apreciables y los números infinitesimales.

Números infinitos: Los números infinitos positivos y negativos.

Estas diferentes formas en la que hemos clasificado los números hiperreales nos permite retrotraernos de una manera intuitiva pero no menos interesante a como fue <u>la primera vía histórica</u> a través de la cual Leibniz y Newton introdujeron la construcción directa de dichos números y su aritmética: $\{+, \mathrm{x}\}$. Definieron los números infinitesimales, los números infinitos, los números finitos y los números apreciables (aquí también incluían a los números reales) y unas reglas aritméticas ad hoc para estos conjuntos, a modo ilustrativo enunciaremos la suma y la multiplicación:

+	Infinitesimal= I	Finito= F	Apreciable= A	Infinito= Inf
Infinitesimal= I	I	F	A	Inf
Finito= F	F	F	F	Inf
Apreciable= A	A	F	F	Inf
Infinito= Inf	Inf	Inf	Inf	Inf o ?

Las únicas dudas que nos podrían asaltar son, ¿por qué la suma de un número apreciable y un número finito es un número finito? y ¿por qué la suma dos números apreciables es un número finito? es por las diferentes combinaciones de

[146] P(ℕ) es el conjunto formado por todos los subconjuntos de ℕ, llamado también partes de ℕ

(número apreciable, número finito) y (número apreciable, número apreciable), veamos un ejemplo para cada caso de las posibles combinaciones:

1. (r +λ) – (λ)= r, que es un número real ordinario o estándar por lo que la suma es número finito.
2. (r +λ) + (r -λ)= 2r, que es un número real ordinario o estándar por lo que la suma es un número finito.

El símbolo "?" se da en la suma de infinitos de distinto signo, ω, ω^* y no conocemos su orden de crecimiento $\omega + (-\omega^*)$ entonces tenemos una indeterminación(concepto que estudiamos en 1º y 2º de bachillerato) y tendremos que resolverla para saber a qué número corresponde.

X	Infinitesimal= I	Finito= F	Apreciable= A	Infinito= In
Infinitesimal= I	I	I	I	?
Finito= F	I	F	F	?
Apreciable= A	I	F	A	Inf
Infinito= Inf	?	?	Inf	In f

La multiplicación de un infinitesimal ε y un infinito ω es una indeterminación por eso ponemos el símbolo "?". También ponemos el símbolo "?", en la multiplicación de un número infinito con un número finito, ya que se puede dar el caso que hemos mencionado anteriormente : ε x ω ya que el infinitesimal ε, es un número finito.

Bibliografía

Libros

[1] BOYER, C, Historia de la matemática, Madrid, Alianza Universidad, 1968.

[2] DIAZ-HERNANDO, J.A., Cálculo diferencial, Madrid, Tebar Flores, 1991.

[3] GUZMAN, M., Para pensar mejor, Madrid, Pirámide, 1995.

[4] SHIPACHEV,V.S, Fundamentos de las matemáticas superiores Moscú, Editorial MIR 1989.

[5] WELLS, D., Curious and interesting numbers, Middlesex, Penguin Books.

Fuentes de Internet

[6] Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero hiperreal.

[7] Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Non-standard analysis.

[8] Ivorra, C: "Análisis no estándar". P´ agina: http://www.uv.es/ ivorra/Libros/ANE.pdf

[9] Portal web llamado "Derivadas". Página: https://www.derivadas.es/2009/01/03/losnumeros-hiperreales.