Probabilidad condicionada. Probabilidad Total. Teorema de Bayes

Autor: Oliván Calzada, Emiliana (Licenciada en Matemáticas, Profesora de Matemáticas en Educación Secundaria).
Público: Alumnos de Bachillerato de Ciencias. Estudiantes de matemáticas y profesores de matemáticas. **Materia:** Matemáticas (Probabilidad). **Idioma:** Español.

Título: Probabilidad condicionada. Probabilidad Total. Teorema de Bayes.
Resumen
Este tema se incluye en los contenidos de Matemáticas I de Bachillerato en el punto: “Profundización en el estudio de las probabilidades condicionadas, totales y a posteriori”. El alumno debe conocer y manejar todos los conceptos vistos a lo largo de este tema. Este artículo ayuda a comprender la base teórica de dichos conceptos. Al final del artículo hay un ejemplo que aclara mejor los contenidos. Puede ser de gran utilidad para el público al que va dirigido.
Palabras clave: Probabilidad condicionada. Probabilidad Total. Teorema de Bayes.

Title: Conditional probability. Total Probability. Bayes' Theorem.
Abstract
This topic is included in the contents of Mathematics I of Bachillerato in the point: "Deepening in the study of conditioned probabilities, total probabilitiesand a posteriori probabilities". The student must know and handle all the concepts seen along this topic. This article helps to understand the theoretical basis of these concepts. At the end of the article there is an example that clarifies the contents better.It can be very useful for the target audience.
Keywords: Conditional probability. Total Probability. Bayes' Theorem.

Recibido 2017-08-08; Aceptado 2017-08-14; Publicado 2017-09-25; Código PD: 087026

INTRODUCCIÓN

Este tema se incluye en los contenidos de Matemáticas I de Bachillerato en el punto: “Profundización en el estudio de las probabilidades compuestas, condicionadas, totales y a posteriori”. El alumno debe conocer y manejar todos los conceptos vistos a lo largo de este tema. Este artículo ayuda a comprender la base teórica de dichos conceptos. Al final del artículo hay un ejemplo que aclara mejor los contenidos.

PROBABILIDAD CONDICIONADA. PROBABILIDAD COMPUESTA.

1.1. Definición (probabilidad condicionada):

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico. Sea $B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$. Sea $A \in \mathcal{A}$. Se llama probabilidad del suceso A condicionado al suceso B (es decir, probabilidad de que ocurra A supuesto que ha ocurrido B) denotado $P(A|B)$ al cociente $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Nota: Si $P(B) = 0 \to P(A|B)$ no estará definida.

Teorema: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico. Sea $B \in \mathcal{A}$ un suceso tal que $P(B) > 0$, entonces $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ donde $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $\forall A \in \mathcal{A}$ es un espacio probabilístico al que se denomina espacio de probabilidad condicional.

Demostración: Dado que $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio probabilizable, basta demostrar que P_B define una medida de probabilidad, es decir, que cumple la axiomática de Kolmogoroff (los tres axiomas siguientes):

Axioma 1: $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

Axioma 2: $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

Axioma 3: Sean $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$

$$P_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B\right)}{p(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P_B(A_i)$$

Propiedades:

1.- $P_B(\phi) = 0$

Demostración: $P_B(\phi) = \dfrac{P(\phi \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\phi)}{P(B)} = \dfrac{0}{P(B)} = 0$

2.- $\{A_1, \cdots\cdots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \phi \quad si \quad i \neq j$. Entonces: $P_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_B(A_i)$

Demostración: Sean $A_i = \phi \quad \forall i > n$

$$P_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{Axioma\ 3}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P_B(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P_B(A_i) + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} P_B\left(\overbrace{A_i}^{\phi}\right)}_{0} = \sum_{i=1}^{n} P_B(A_i)$$

3.- $\forall A \in \mathcal{A} \quad P_B(A^c) = 1 - P_B(A)$

Demostración:

$$1 = P_B(\Omega) = P_B(A \cup A^c) \underset{A \cap A^C = \phi}{=} P_B(A) + P_B(A^c) \rightarrow P_B(A^c) = 1 - P_B(A)$$

4.- $\forall A, C \in \mathcal{A} \quad A \subseteq C \rightarrow P_B(A) \leq P_B(C)$

Demostración:

$$A \subseteq C \rightarrow C = \cap(A \cup A^c) = (C \cap A) \cup (C \cap A^c) \underset{A \subseteq C}{=} A \cup (C \cap A^c) \underset{A \cap (C \cap A^C) = \phi}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow P_B(C) = P_B(A) + P_B(C \cap A^c) \rightarrow P_B(C) \geq P_B(A)$$

Nota: La igualdad se da en el caso $C = A$. Si $C \neq A$ entonces: $P_B(A) < P_B(C)$

5.- $\forall A \in \mathcal{A} \quad 0 \leq P_B(A) \leq 1$

Demostración:

$$A \subset \Omega \quad 0 \leq P_B(A) \leq P_B(\Omega) = 1$$

6.- $A \subset C \rightarrow \quad P_B(C - A) = P_B(C \cap A^C) = P_B(C) - P_B(A)$

Demostración:

$$P_B(C \cap A^C) = 1 - P_B(C^C \cup A) \underset{\substack{C^C \cap A = \phi \\ porque\ A \subset C}}{=} 1 - P_B(C^c) - P_B(A) = P_B(C) - P_B(A)$$

7.- $\forall A, C \in \mathcal{A} \quad P_B(A \cup C) = P_B(A) + P_B(C) - P_B(A \cap C)$

Demostración:

$$A = (A \cap C^C) \cup (A \cap C) \rightarrow P_B(A) = P_B(A \cap C^C) + P_B(A \cap C)$$

$$C=\left(C\cap A^{C}\right)\cup\left(C\cap A\right)\rightarrow P_{B}\left(C\right)=P_{B}\left(C\cap A^{C}\right)+P_{B}\left(C\cap A\right)$$

Sumando:

$$P_{B}\left(A\right)+P_{B}\left(C\right)=\underbrace{P_{B}\left(A\cap C^{c}\right)+P_{B}\left(A\cap C\right)+P_{B}\left(C\cap A^{c}\right)+P\left(C\cap A\right)}_{P_{B}\left(A\cup C\right)}$$

$$\rightarrow P_{B}\left(A\cup C\right)=P_{B}\left(A\right)+P_{B}\left(C\right)-P_{B}\left(A\cap C\right)$$

Generalizando para tres sucesos:

$$P_{B}\left(A\cup C\cup D\right)=P_{B}\left(A\right)+P_{B}\left(C\right)+P_{B}\left(D\right)-P_{B}\left(A\cap C\right)-P_{B}\left(A\cap D\right)-P_{B}\left(C\cap D\right)+P_{B}\left(A\cap C\cap D\right)$$

Generalizando para n sucesos:

$$P_{B}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}P_{B}\left(A_{i}\right)-\sum_{i<j}P_{B}\left(A_{i}\cap A_{j}\right)+\sum_{i<j<k}P_{B}\left(A_{i}\cap A_{j}\cap A_{k}\right)-\cdots+$$

$$+\left(-1\right)^{l-1}\cdot\sum_{i<j<\cdots<l}P_{B}\left(A_{i}\cap A_{j}\cap\cdots A_{l}\right)+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\cdot P_{B}\left(A_{i}\cap A_{j}\cap\cdots A_{n}\right)$$

A este caso le llamamos principio de inclusión- exclusión.

Demostración: Aplicando inducción.

8.- $P_{B}\left(A\cup C\right)\leq P_{B}\left(A\right)+P_{B}\left(C\right)$.

Nota: La igualdad se da si $A\cap C=\phi$

Demostración: Inmediata utilizando la propiedad 7.

9.- $P_{B}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_{i}\right)\leq\sum_{i=1}^{n}P_{B}\left(A_{i}\right)$

Demostración: Utilizando inducción:

- $n=2$: Cierto por la propiedad 8.
- Supongamos el resultado cierto para n
- Veamos que el resultado es cierto para $n+1$

$$P_{B}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_{i}\right)=P_{B}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_{i}\right)\cup A_{n+1}\right)\underset{n=2}{\leq}P_{B}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_{i}\right)+P_{B}\left(A_{n+1}\right)$$

$$\underset{hipótesis\ .inducción}{\leq}\sum_{i=1}^{n}P_{B}\left(A_{i}\right)+P_{B}\left(A_{n+1}\right)=\sum_{i=1}^{n+1}P_{B}\left(A_{i}\right)$$

10.- $P_{B}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i}\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}P_{B}\left(A_{i}\right)$

Demostración: Definimos $C_{n}=A_{n}-\bigcup_{i=0}^{n-1}A_{i}$ con $A_{0}=\phi$. Es decir:

$C_{1}=A_{1},C_{2}=A_{2}-A_{1},C_{3}=A_{3}-\left(A_{1}\cup A_{2}\right),\cdots\cdots$. Los C_{n} así definidos verifican:

- $C_{i}\subset A_{i}$, por definición.
- $C_{i}\cap C_{j}=\phi\quad\forall i\neq j$

Demostración:

Si $i<j\rightarrow\left.\begin{array}{l}C_{j}\subset A_{i}^{c}\ por\ definición\\C_{i}\subset A_{i}\ por\ definición\end{array}\right\}C_{i}\cap C_{j}=\phi\ \ si\ \ i<j$

Si $i>j\rightarrow\left.\begin{array}{l}C_{i}\subset A_{j}^{c}\ por\ definición\\C_{j}\subset A_{j}\ por\ definición\end{array}\right\}C_{i}\cap C_{j}=\phi\ \ si\ \ i>j$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$

Demostración:

$\supset)\ \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, porque por definición $C_i \subset A_i$

$\subset)$ Veamos que si $\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$

- Si $\omega \in A_1 \underset{A_1=C_1}{\Rightarrow} \omega \in C_1$
- Si $\omega \notin A_1, \exists i > 1\,(\text{mínimo})\ tal\ que\ \omega \in A_i\ y\ \omega \notin A_j\ \forall j < i,$

$$por\ definición\ de\ C_i\ \left(C_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right),\quad \omega \in C_i \rightarrow \omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

Luego, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$

Así, $P_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \underset{\substack{C_i \cap C_j = \phi \\ \forall i \neq j}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P_B(C_i) \underset{\substack{C_i \subset A_i \\ P(C_i) \leq P(A_i)}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} P_B(A_i)$

11.- $\forall A, C \in \mathcal{A} \rightarrow \quad P_B(A \cap C) \geq 1 - P_B(A^c) - P_B(C^c)$

Demostración:

$$P_B(A \cap C) = 1 - P_B(A^c \cup C^c) \underset{Por\ 8}{\geq} 1 - P_B(A^c) - P_B(C^c)$$

12.- $P_B\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P_B\left(A_i^{\,C}\right)$

Demostración:

$$P_B\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{\,c}\right) \underset{Por\ 10}{\geq} 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P_B\left(A_i^{\,C}\right)$$

1.2. Probabilidad compuesta

De la definición de probabilidad condicionada se deduce que:

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(A) \cdot P(B|A) & con \quad P(A) \neq 0 \\ P(B) \cdot P(A|B) & con \quad P(B) \neq 0 \end{cases}$$

Esta manera de expresar la probabilidad condicionada se llama Teorema de la Probabilidad Compuesta o Regla de la multiplicación.

Teorema: Generalización del Teorema de la Probabilidad Compuesta

Sean $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ tal que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$. Entonces:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Demostración: Por inducción:

$n=2: P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$, visto por definición.

$$n=3: P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3] = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \overset{n=2}{=}$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Suponemos el resultado cierto para n, es decir:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Veamos que también es cierto para $(n+1)$:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = P[(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1}] \overset{n=2}{=}$$
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cdot P(A_{n+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_n) \overset{hip\ inducción}{=}$$
$$P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

1.3. Independencia estocástica

<u>Definición</u>: Sean $\forall A \in \mathcal{A} \quad con \quad P(A) \neq 0 \neq P(B)$. Diremos que A es estocásticamente independiente de B si $P(A|B) = P(A)$. Equivalentemente se cumple si $P(B|A) = P(B)$

<u>Nota</u>: Como $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$, si A y B son estocásticamente independientes se tiene que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Así obtenemos otra definición equivalente.

<u>Notas</u>:
1.- Aunque alguno de los sucesos tenga probabilidad nula, la caracterización anterior sigue siendo válida.
<u>Demostración</u>:
Si $P(A) = 0 \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0 \cdot P(B|A) = 0$
Por otra parte $P(A) \cdot P(B) = 0 \cdot P(B) = 0$
Entonces: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
2.- $\forall A \in \mathcal{A}$, A es independiente de ϕ y Ω
<u>Demostración</u>:
a) $P(A \cap \phi) = P(\phi) = 0 = P(A) \cdot 0 = P(A) \cdot P(\phi) \rightarrow P(A \cap \phi) = P(A) \cdot P(\phi)$.
Entonces A y ϕ son independientes.
b) $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(\Omega) \rightarrow P(A \cap \Omega) = P(A) \cdot P(\Omega)$.
Entonces A y Ω son independientes.

<u>Definiciones</u>:
Si $P(A|B) \neq P(A)$ se dice que A es dependiente de B.
Si $P(B|A) \neq P(B)$ se dice que B es dependiente de A.

<u>Proposición</u>: Si (A, B) es una pareja de sucesos independientes también lo son las parejas (A, B^c), (A^c, B) y (A^c, B^c)
<u>Demostración</u>: Como A, B son independientes $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$ y $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- $1 - P(A^c) = P(A) = P(A|B) = 1 - P(A^c|B) \rightarrow P(A^c) = P(A^c|B)$
- $1 - P(B^c) = P(B) = P(B|A) = 1 - P(B^c|A) \rightarrow P(B^c) = P(B^c|A)$

- $P\left(A^c \middle| B^c\right) = 1 - P\left(A \middle| B^c\right) \underset{\substack{P(A|B^C)=P(A) \\ porque\ A\ y\ B^C \\ son\ \ independientes}}{=} 1 - P(A) = P\left(A^c\right)$

1.4. Independencia completa

Definición: Sea $\{A_1, \cdots, A_n\} \in \mathcal{A}$, se dice que esta familia es independiente dos a dos si $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i \neq j$

Definición: Sea $\{A_1, \cdots, A_n\} \in \mathcal{A}$, se dice que esta familia completa o mutuamente independiente si para cualquier subfamilia $\{A_{i1}, \cdots, A_{ik}\}$ se tiene $P(A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ik}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{ij})$

Corolario:
Independencia completa de sucesos de la familia $\{A_1, \cdots, A_n\} \subset \mathcal{A} \Leftrightarrow$

- Independencia dos a dos: $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i \neq j \rightarrow \binom{n}{2}\ condiciones$
- Independencia tres a tres:
  $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) \quad \forall i \neq j \neq k \neq i \rightarrow \binom{n}{3}\ condiciones$
- $\vdots$
- Independencia n a n: $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n) \rightarrow \binom{n}{n}\ condiciones$

Nota: No hay que confundir incompatibilidad con independencia.
Dos sucesos incompatibles no pueden ser independientes salvo en algún caso especial (si la probabilidad es cero en alguno de ellos).
Demostración:

- Si A y B son incompatibles con $P(A) > 0,\ P(B) > 0$
  $P(A \cap B) = P(\phi) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) > 0 \rightarrow No\ son\ independientes$
- Si $P(A) = 0\ ó\ P(B) = 0\ y\ A, B\ incompatibles\ P(A \cap B) = P(\phi) = 0 = P(A) \cdot P(B) = 0$

Nota: Así, para la independencia completa de n sucesos se deben cumplir: $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - n - 1$ condiciones.
Demostración:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}$$
$$\Rightarrow 2^n - n - 1 = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Nota: $\forall i = 2, \cdots, n$

- Independencia $i \quad a \quad i$ no implica independencia $j \quad a \quad j \quad \forall j < i$

- Independencia i a i no implica independencia completa.

SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS: TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL. TEOREMA DE BAYES

Definición: Una familia *finita* de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ constituye un sistema completo de sucesos si se verifica:

- $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Nota: Puede generalizarse a una familia numerable (sistema infinito de sucesos).
Caso particular: $\{A, A^c\}$ forman un sistema completo de sucesos.

Teorema: (Probabilidad Total)
Dado un sistema completo de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, si B es un suceso del que conocemos las $P(B|A_i)$ y además conocemos las $P(A_i)$ entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Demostración:

$$B = \Omega \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

$A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$, porque $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ es un sistema completo de sucesos.
Entonces: $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \phi \quad \forall i \neq j \quad (\otimes)$

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \right) \underset{(\otimes)}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \underset{\substack{P(A_i)>0 \ para \\ que \ P(B|A_i) \ esté \\ bien \ definida}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

(Si $\exists$ algún A_i con $p(A_i) = 0$, se elimina de la lista y se considera el sistema con un suceso menos).
Teorema: Teorema de Bayes
Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ un sistema completo de sucesos. Si B es un suceso con $p(B) > 0$ del que conocemos las $p(B|A_i)$ y además conocemos las $p(A_i)$, entonces:

$$p(A_i|B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A_j) \cdot p(B|A_j)}$$

Demostración:

$$P(A_i|B) \underset{\substack{definición de \\ probabilidad \\ condicionada}}{=} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \underset{\substack{probabilidad \\ total}}{=} \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}$$

Nota: Para aplicar el Teorema de la Probabilidad Total, el Teorema de Bayes y problemas con probabilidades de experimentos compuestos se suelen utilizar los diagramas en árbol.

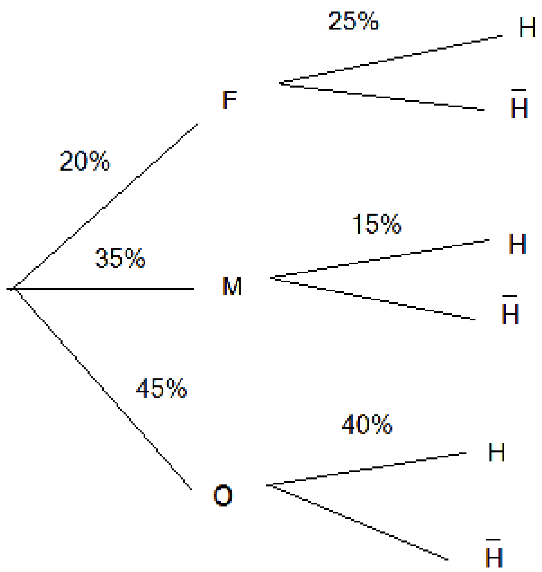
Ejemplo:

Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20 % se realizan correcciones faciales, un 35% implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe además, que son de género masculino el 25% de los que realizan correcciones faciales, 15% implantes mamarios y 40% otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar:

a) Determinar la probabilidad de que sea de género masculino.
b) Si resulta que es de género masculino, determinar la probabilidad de que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios.

Solución:

Sea el suceso F: Pacientes que se realizan cirugías faciales.
Sea el suceso M: Pacientes que se realizan implantes mamarios.
Sea el suceso O: Pacientes que se realizan otras cirugías correctivas.
Sea el suceso H: Pacientes de género masculino.
Sea el suceso $\overline{H}$: Pacientes de género no masculino.



a) La probabilidad de que sea de género masculino se refiere a un problema de probabilidad total, ya que es el suceso condicionado y las cirugías los condicionantes.

$$P(H)=P(F)\cdot P(H|F)+P(M)\cdot P(H|M)+P(O)\cdot P(O|H)=$$
$$=0{,}2\cdot 0{,}25+0{,}35\cdot 0{,}15+0{,}45\cdot 0{,}40\approx 0{,}28$$

b) Como el suceso condicionado ha ocurrido entonces se aplica el teorema de Bayes, luego el valor de la probabilidad será:

$$P(M|H)=\frac{P(M)\cdot P(H|M)}{P(F)\cdot P(H|F)+P(M)\cdot P(H|M)+P(O)\cdot P(O|M)}=$$
$$=\frac{0{,}35\cdot 0{,}15}{0{,}2\cdot 0{,}25+0{,}35\cdot 0{,}15+0{,}45\cdot 0{,}40}\approx 0{,}19$$

Bibliografía

- CRAMER, H.: Elementos de la teoría de las probabilidades.
- ENGEL, A.: Probabilidad y estadística.
- GMURMAN, V. E.: Teoría de las probabilidades y estadística matemática.
- FELLER, W.: An Introduction to probability theory and its applications.
- RÍOS, S: Análisis estadístico aplicado.